

मॉडल पेपर

गणित (कक्षा-12)

समय 3 घंटा 15 मिनट

पूर्णांक 100

1. सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए

(क) समुच्चय N में $R = \{(x, y) : x + 2y = 8\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R का परिसर निम्न में से कौन-सा है? 1 $n=2$

- (i) {2,4,8}
- (ii) {2, 4, 6, 8}
- (iii) {2, 4, 6}
- (iv) {1, 2, 3}

$$\begin{aligned} n &= 2 \\ x + 2y &= 8 \\ y &= \frac{8-x}{2} \\ y &= 4 - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

(ख) मान लीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4} में, $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए 1

- (i) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है
- (ii) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है
- (iii) R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है
- (iv) R एक तुल्यता संबंध है

स्वतुल्य $(a, b) \in R$
 सममित $(1, 2) \in R$
 $(2, 1) \notin R$
 संक्रामक $(a, b) \in R$ and $(b, c) \in R$ then $(a, c) \in R$

(ग) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ बराबर है

- (i) $\tan x + \cot x + c$
- (ii) $\tan x - \cot x + c$
- (iii) $\tan x \cot x + c$
- (iv) $\tan x - \cot 2x + c$

(घ) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ का व्यापक हल है-

- (i) $e^x + e^{-y} = c$
- (ii) $e^x + e^y = c$
- (iii) $e^{-x} + e^y = c$
- (iv) $e^{-x} + e^{-y} = c$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$$

$$\frac{dy}{e^y} = e^x dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int e^x dx = |e^x dx|$$

(ङ) यदि दो सदिशों \vec{a} और \vec{b} के बीच का कोण θ है तो $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ है। जब θ बराबर है

(i) 0

(ii) $\frac{\pi}{4}$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$\int \frac{dn}{\sin^2 n \cdot \cos^2 n} = \int \frac{\sec^2 n \cdot \sec^2 n}{\sin^2 n} dn = \int \frac{(1 + \tan^2 n) \sec^2 n}{\sin^2 n} dn = -\cot n + \tan n + C$$

(ii) $\frac{\pi}{4}$ ✓

$(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$

(iii) $\frac{\pi}{2}$

$\cos \theta = \sin \theta$

(iv) π

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

2. सभी खण्ड कीजिए

$\tan^{-1}(-\tan \frac{\pi}{4})$

(क) $\tan^{-1}(-1)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

$-\tan^{-1}(\tan \frac{\pi}{4}) \Rightarrow -\frac{\pi}{4}$

(ख) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \cos x$ बिन्दु $x = \frac{\pi}{4}$ पर संतत है।

(ग) अवकल समीकरण: $\sqrt[3]{\frac{d^2y}{dx^2}} = \sqrt{\frac{dy}{dx}}$ की कोटि एवं घात बताइए।

$\sqrt[3]{\frac{d^2y}{dx^2}} = \sqrt{\frac{dy}{dx}}$

(घ) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $z = 2x + 5y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

$x + y \leq 4$
 $x \geq 0$
 $y \geq 0$

order = 2

power = 2

$(\frac{d^2y}{dx^2})^2 = (\frac{dy}{dx})^3$

(ङ) यदि $P(A) = 3/5$ और $P(B) = 2/5$ और A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो $P(A \cap B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(क) सिद्ध कीजिए कि

$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$

$\tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right] = \frac{x}{2}; x \in (0, \frac{\pi}{4})$

$\frac{\sqrt{1+\sin \theta}}{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} + 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{6}{25}$

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$\sqrt{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^{5/2}}$

$\left| \frac{a^2+1}{ab} \frac{ab}{b^2+1} \frac{ac}{bc} \frac{ac}{c^2+1} \right| = 1 + a^2 + b^2 + c^2$

$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + u \sin^2 \theta} d\theta$
 $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n} \theta}{\cos^2 \theta + u(1-\cos^2 \theta)} d\theta$
 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

(ग) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

(घ) रेखाओं $\vec{r} = 6i + 2j + 2k + \lambda(i - 2j + 2k)$ और $\vec{r} = -4i - k + \mu(3i - 2j - 2k)$ के बीच की न्यूनतम दूरी कीजिए।

$\vec{r} = a_1 + \lambda b_1$

$\vec{r} = a_2 + \mu b_2$

$(b_1 \times b_2) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

(ङ) सिद्ध कीजिए कि अर्द्धशीर्ष कोण α और ऊँचाई h के लंबवृत्तीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की

ऊँचाई, शंकु की ऊँचाई की एक तिहाई है और बेलन का अधिकतम आयतन $\frac{4}{27} \pi h^3 \tan^2 \alpha$ है।

(च) $\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

6. किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए-

limit = 1, f(0) = 0

6. किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए-

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad f(0) = 6$$

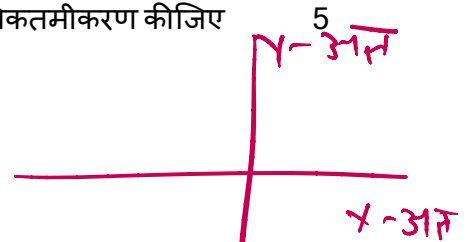
(क) यदि $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{जब } x \neq 0 \\ 0 & \text{जब } x = 0 \end{cases}$ तो सिद्ध कीजिए कि $f(x)$, $x = 0$ पर असतत है।

(ख) दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ एवं $(x-2)^2 + y^2 = 4$ मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $\vec{r} \cdot (2i + 2j - 3k) = 7$, $\vec{r} \cdot (2i + 5j + 3k) = 9$ की प्रतिच्छेदन रेखा और $(2, 1, 3)$ से होकर जाता है। 5

(घ) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $z = 5x + 10y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए

$$\begin{cases} x + 2y \leq 120 \\ x + y \geq 60 \\ x - 2y \geq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



(ङ) सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = y^2$ और $xy = k$ एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं, यदि $8k^2 = 1$ है। 5

(च) एक बीमा कम्पनी 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकतायें क्रमशः 0.01, 0.03 और 0.15 हैं। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटना ग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है? 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए

(क) प्रारम्भिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

(ख) आव्यूहों के गुणनफल $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ a & 2 & -3 \\ b & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण निकाय

को हल कीजिए

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2y - 3z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए

(क) $x = 0$ और $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8

(क) $x = 0$ और $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

(ख) अवकल समीकरण $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए

(क) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

(ख) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

$$\frac{dn}{dy} = b \, dn = \bullet$$

$$\int \cdot f = e^{b \, a \, y}$$

$$n \cdot \int f = \int \dots$$

Put $\sin n - \cos n = t$

$$d(\sin n - \cos n) = dt$$

$$\cos n + \sin n \, dn = dt$$

$$\int_0^a f(n) \, dn = \int_0^a f(u-n) \, dn$$

2 = 1
1 = -1