

Set-2

**इण्टरमीडिएट
गणित, 2020**

324 (XB)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

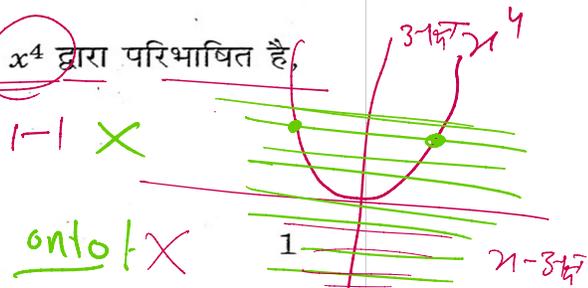
[पूर्णांक : 100

नोट—प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

✓ 1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए—

✓ (क) मान लीजिए कि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है, सही उत्तर का चयन कीजिए—

- (i) f एकैकी आच्छादक है
- (ii) f बहु-एक आच्छादक है
- (iii) f एकैकी है किन्तु आच्छादक नहीं है
- (iv) f न तो एकैकी है और न तो आच्छादक है।



✓ (ख) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान है—

- (i) π
- (ii) $-\frac{\pi}{2}$
- (iii) 0
- (iv) $2\sqrt{3}$
- 1

Handwritten solution for (ख):

$$\tan^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{3}\right) - \cot^{-1}\left(\cot \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}$$

$$= \frac{2\pi - 5\pi}{6} \Rightarrow -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

✓ (ग) किसी बिन्दु पर $y = x + 1$ वक्र $(y^2 = 4x)$ की स्पर्श रेखा है?

- (i) (1, 2)
- (ii) (2, 1)
- (iii) (1, -2)
- (iv) (-1, 2)

Handwritten solution for (ग):

$$1 = \frac{2}{y}$$

$$y = 2$$

Handwritten solution for (ग):

$$2 = n + 1$$

$$1 = n$$

Handwritten solution for (ग):

$$y^2 = 4x \quad 1$$

Diff. w.r.t to 'n'

$$2y \frac{dy}{dn} = 4$$

$$m = \left(\frac{dy}{dn}\right) = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y}$$

✓ (घ) यदि A और B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) = P(A)$, तब—

- (i) $P(B/A) = 1$
- (ii) $P(A/B) = 1$
- (iii) $P(B/A) = 0$
- (iv) $P(A/B) = 0$

Handwritten solution for (घ):

$$P(A \cap B) = P(A)$$

Handwritten solution for (घ):

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(B) = P(A \cap B)$$

$$1 = P(A \cap B)$$

✓ (ङ) निम्नलिखित में से समाकलन $\int \cos^2 x dx$ का सही मान है—

Handwritten solution for (ङ):

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x + 1 = 2\cos^2 x$$

$$\int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx$$

$$\frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{2}x + C$$

✓ (ड) निम्नलिखित में से समाकलन $\int \cos^2 x dx$ का सही मान है—

✓ (i) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

(ii) $2 \cos x \sin x + \frac{x}{2} + c$

(iii) $\frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{2} + c$

(iv) $\cos 2x + c$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$1 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$1 \cdot P(B) = P(A \cap B)$

✓ 2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए—

(क) $\cot[\tan^{-1}(a) + \cot^{-1}(a)]$ का मान ज्ञात कीजिए।

1

हल

$\tan^{-1}(a) + \cot^{-1}(a) = \frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}(a) + \cot^{-1}(a) = \frac{\pi}{2}$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$L.H.L = R.H.L = f(a)$

✓ (ख) जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = \frac{x^2}{2}$ $x=0$ पर सतत है।

cont

1

Short Trick

objective

$f(n) = \frac{n^2}{2}$

$f'(n) = \frac{2n}{2}$

$\lim_{n \rightarrow 0} f'(n) = 0$

exists finitely contⁿ at $n=0$

✓ (ग) यदि $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ है, तो $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ ज्ञात कीजिए।

1

$\vec{a} + \vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$
 $= 6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

$$= 6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) - (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) \\ &= \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} - 5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k} \\ &= -4\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}\end{aligned}$$

✓ (घ) यदि $\underline{X + Y} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $\underline{X - Y} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ हैं, तो \underline{X} तथा \underline{Y} का मान ज्ञात कीजिए। 1

$$\begin{array}{l} X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \\ -X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \hline 2X = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \\ X = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} // \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} +2Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

✓ (ङ) अवकल समीकरण $\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}}$ को हल कीजिए। 1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$$

$$\frac{dy}{dn} \propto \frac{1+n^2}{1+y^2}$$

$$\int (1+y^2) dy = \int (1+n^2) dn$$

$$\boxed{\frac{y+y^3}{3} = \frac{n+n^3}{3} + C}$$

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए—

(क) वक्र $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ के $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलम्ब की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

2

$$\frac{dy}{dn} = ?$$

$$x = a \cos^3 \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a \cdot 3 \cos^2 \theta \cdot (-\sin \theta)$$

$$= -3a \cos^2 \theta \cdot \sin \theta$$

$$y = a \sin^3 \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a \cdot 3 \sin^2 \theta \cdot \cos \theta$$

$$= 3a \sin^2 \theta \cdot \cos \theta$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dn}$$

$$= \frac{3a \sin^2 \theta \cdot \cos \theta}{3a \cos^2 \theta \cdot \sin \theta} \cdot -1$$

$$m = \frac{dy}{dn} = -\tan \theta$$

$$= -\tan \frac{\pi}{4}$$

$$= -1$$

\Rightarrow अभिलम्ब की प्रवणता $(-\frac{1}{m})$

(ख) यदि $y = \sin^{-1} x$, तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}$.

$v = \sin^{-1} x$

2

$$= -\left(\frac{1}{-1}\right)$$

$$= 1$$

(2) $\frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} = x \frac{dx}{dx}$

2

$y = \sin^{-1} x$
 Diff. w.r.to 'x'

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} = 1$

$(1-x^2) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$

$(1-x^2) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$

Again diff. w.r.to 'x'

$(1-x^2) 2 \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot (0-2x) = 0$

$2(1-x^2) \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (-2x) = 0$

$2 \frac{dy}{dx} (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}$

Q.2 - 2020

(ग) आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

3×2 2×3

$[A]_{i \times j} [B]_{j \times k}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 2-1 & 0+2 & 2+1 \\ 3-2 & 0+4 & 3+2 \\ -1-1 & 0+2 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(घ) एक द्विआधारी संक्रिया * समुच्चय R पर $a * b = \frac{a+b}{2} \forall a, b \in R$

✓ (घ) एक द्विआधारी संक्रिया * समुच्चय R पर $a * b = \frac{a+b}{2} \forall a, b \in R$ द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि यह संक्रिया क्रमविनिमेय है किन्तु साहचर्य नहीं है।

$a * b = b * a$ ✓ $\frac{2+4}{2}$ ✓

Commutative

Associative

① $a * b = b * a$

Soln

$a * b = \frac{a+b}{2}$
 $= \frac{b+a}{2}$

$a * b = b * a$

$\frac{a+b}{2}$

② Agro!

$a * (b * c) = (a * b) * c$

L.H.S: $a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right)$
 $= \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2}$
 $= \frac{2a + b + c}{4}$

$(a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c$
 $= \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2}$
 $= \frac{a+b+2c}{4} \neq a * (b * c)$

✓ 4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए—

✓ (क) यदि $y = x^x \cos x$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

$y = x^{x \cos x}$

log लेने पर

$\log a^b = b \log a$

$\log y = \frac{x \cos x}{I} \log x$

$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x \cos x \times \frac{1}{x} \cdot 1 + \log x (x(-\sin x) + \cos x)$

$\frac{dy}{dx} = y [\cos x + \log x (-x \sin x + \cos x)]$

$= x^{x \cos x} [\cos x + \log (-x \sin x + \cos x)]$

$\frac{dy}{dx} = \frac{+}{\cos x}$

✓ (ख) बिन्दुओं $(2, -5, 1)$ तथा $(1, 4, -6)$ को मिलाने वाली रेखा पर उस बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो उस रेखा को $2 : 3$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

$$\begin{array}{ccc} (2, -5, 1) & (x, y, z) & (1, 4, -6) \\ \text{A} & \text{C} & \text{B} \\ 2 = m_1 & & 3 = m_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{2 \times 1 + 3 \times 2}{2 + 3} \\ &= \frac{2 + 6}{5} \\ &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{2 \times 4 + 3 \times -5}{2 + 3} \\ &= \frac{8 + 15}{5} \\ &= \frac{-7}{5} // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{2 \times -6 + 3 \times 1}{2 + 3} \\ &= \frac{-12 + 3}{5} \\ &= \frac{-9}{5} // \end{aligned}$$

✓ (ग) यदि $P(A) = \frac{1}{3}$ तथा $P(B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ हों, तो क्या घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र हैं?

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A और B स्वतंत्र नहीं हैं।

$$\frac{2}{3} =$$

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2 + 3}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{6} \neq \frac{2}{3}$$

✓ (घ) यदि $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए $\frac{x}{2} + y + z = xyz$.

Solⁿ $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$

$$\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \tan^{-1}z = \pi$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{x+y}{1-xy} + z}{1 - \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)z}\right) = \pi$$

$$\frac{x+y+z(1-xy)}{1-xy} = \tan \pi$$

$$\frac{x+y+z(1-xy)}{1-xy - xz - yz} = 0$$

$$\frac{x+y+z(1-xy)}{1-xy - xz - yz} = 0$$

$$x+y+z(1-xy) = 0$$

$$x+y+z = xyz$$

Proved

✓ 5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए—

(क) $y = (\cos x)^{\sin x} + x^x$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। 5

