Set 1 2020

Tuesday, December 14, 2021 1:06 AM

Set-1

इण्टरमीडिएट गणित, 2020

324 (XA)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] **[पूर्णांक : 100**

नोट—प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

निर्देश—(i) इस प्रश्नपत्र में कुल **नौ** प्रश्न हैं। (ii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं। (iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं। (iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं। (v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए। (vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए—

(क) मान लीजिए कि $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ है। तब f —

(i) एकैकी आच्छादक है

(ii) बहु-एक आच्छादक है

(iii) एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है

(iv) न तो एकैकी है और न आच्छादक है। 1

(ख) $\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ का मान है—

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) इनमें से कोई नहीं। 1

(ग) समाकलन $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$ का मान है—

(i) $\sin x + \cos x + c$ (ii) $\sin x - \cos x + c$

(iii) $\cos x - \sin x + c$ (iv) $-\sin x - \cos x + c$. 1

(iii) $\cos x - \sin x + C$ (iv) $-\sin x$

$\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x}\,dx = \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\,dx$

$= \int \sin x + \cos x\,dx$

$= -\cos x + \sin x + C$

(घ) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = 4\sqrt{x+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ का घात है—

(i) 4 (ii) 3 (iii) 2 (iv) 1

1

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 = x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x = 0$

(ङ) यदि सदिश $5\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k}$ और $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ एक दूसरे पर लम्ब हैं, तो λ का मान है— $\vec{a} = \quad \vec{b}$

(i) 3 (ii) 4 (iii) 6 (iv) 0.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$(5\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k})(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$

$0 = 10 - 3\lambda + 8$

$0 = 18 - 3\lambda$

$3\lambda = 18$

$\lambda = 6$

2. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए—

(क) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

$\sin^{-1}\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sin^{-1}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= -\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\frac{\pi}{4}$ //

(ख) फलन $f : R \to R$ इस प्रकार है कि $f(x) = x^2 + 2$ है, तो $f^{-1}(18)$ को ज्ञात कीजिए।

$y = x^2 + 2$

$f(x) = y$

$x = f^{-1}(y) \quad y = 18$

$x = f^{-1}(18)$

$y = x^2 + 2$

$y - 2 = x^2$

$y-2 = x^2$

$\pm\sqrt{y-2} = x$

$\pm\sqrt{18-2} = x$

$\pm\sqrt{16} = x$

$\pm 4 = x$

$x = f^{-1}(18)$

$f^{-1}(18) = \pm 4$

Any

(ग) यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A)=0.4$, $P(B)=0.8$ और $P(B/A)=0.6$, तो $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए। 1

$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$0.6 \times P(A \cap B)$

0.4

$0.24 = P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Now, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.4 + 0.8 - 0.24$

$= 1.2 - 0.24$

$= 0.96$

$1.20 - .24 = 96$

(घ) समीकरण $y = Ae^x + B$ से सम्बन्धित अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ A, B अचर हैं। 1

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$

$y = Ae^x + B$

Diff. w.r.to 'x'

$\frac{dy}{dx} = Ae^x + 0$

$\frac{dy}{dx} = Ae^x$ — (1)

$\frac{dy}{dx}(c) = 0, \quad \frac{dy}{dx} e^x = e^x$

Again Diff. w.r.to 'x'

$\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^x$ — (2)

समी० (1) व (2)

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0}$

(ङ) फलन $f(x) = \begin{cases} x^3+3, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ के लिए दिखाइए कि यह $x=0$ पर सतत नहीं है।

$x \to 0 - h$, $x \to 0 + h$

L.H.L $= \lim_{h \to 0} (0-h)^3 + 3$

$= \lim_{h \to 0} -h^3 + 3$

$= 0 + 3$

$= 3$

R.H.L $= \lim_{h \to 0} (0+h)^3 + 3$

$= \lim_{h \to 0} h^3 + 3$

$= 3$

L.H.L = R.H.L $\neq f(0) = 1$

$3 = 3 \neq 1$

3. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए–

(क) यदि $y = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

$\frac{dy}{dx} = ?$

$y = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right)$

Hint $x = \tan\theta$

$= \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}+1}{\tan\theta}\right)$ $\quad 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

$= \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sec^2\theta}+1}{\tan\theta}\right)$

$= \cot^{-1}\left(\frac{\sec\theta+1}{\tan\theta}\right)$

$= \cot^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\cos\theta}+1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)$

$y = \cot^{-1}\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ $\quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= \cot^{-1}\left(\frac{1+2\cos^2\theta/2-1}{2\sin\theta/2\cdot\cos\theta/2}\right)$

$y = \cot^{-1}\left(\frac{2\cos^2\theta/2}{2\sin\theta/2\cdot\cos\theta/2}\right)$

$y = \cot^{-1}(\cot\theta/2)$

$y = \theta/2$

$x = \tan\theta$

$\tan^{-1}x = \theta$

$y = \frac{\tan^{-1}x}{2}$

Diff. w.r.t. 'x'

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\tan^{-1}x\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$

(ख) सदिशों $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ और $3\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

$\vec{a}$ $\qquad$ $\vec{b}$

$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})\cdot(3\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k})$

$= 6-3+8$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2}$

$= \sqrt{4+1+4}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{3^2+3^2+4^2}$

$= \sqrt{9+9+16}$

$= 6 - 3 + 8$

$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1 = 3 + 8$

$\vec{j}\cdot\vec{j} = 1 = 11$

$\vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}$

$= \sqrt{9 + 9 + 16}$

$= \sqrt{18 + 16}$

$= \sqrt{34}$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$= \dfrac{11}{3\cdot\sqrt{34}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{11}{3\times\sqrt{34}}\right)$

(ग) निम्न अवरोधों–

$x + y \le 8,\ 3x + 5y \ge 15,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

के अन्तर्गत $Z = x + 3y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 2

$Z_{min} = ?$

$3x + 5y \ge 15$

x-अक्ष $y = 0$

$3x = 15$

$x = 5$

y-अक्ष $x = 0$

$5y = 15$

$y = 3$

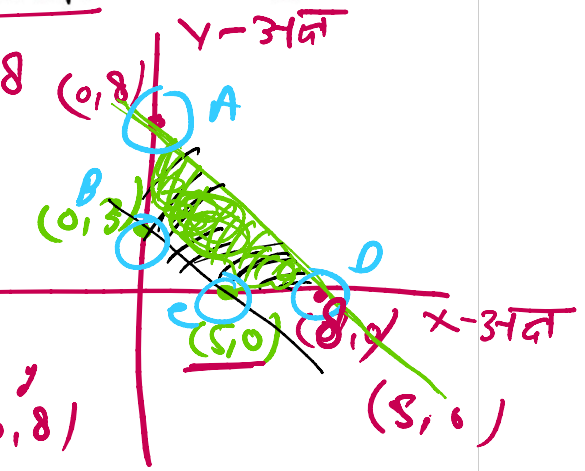
$x + y \le 8$

x-अक्ष $y = 0$

$x = 8$

y-अक्ष $x = 0$

$y = 8$



$Z_A = x + 3y$

$= 0 + 3\times 8$

$= 24$

$Z_B = x + 3y$

$= 0 + 3\times 3$

$= 9$

$Z_C = x + 3y$

$= 5 + 3\times 0$

$= 5$

$Z_D = x + 3y$

$= 8 + 3\times 0$

$= 8$

$Z_{min} = 5$

(घ) P का मान ज्ञात कीजिए, यदि रेखाएं

$\dfrac{1-x}{3} = \dfrac{7y-14}{2p} = \dfrac{z-3}{2}$ और $\dfrac{7-7x}{3p} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हैं। 2

$\dfrac{1-x}{3} = \dfrac{7y-14}{2p} = \dfrac{z-3}{2}$

$\dfrac{7-7x}{3p} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{6-z}{5}$

$$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2b} = \frac{z-3}{2}$$

$$\frac{-(x-1)}{3} = \frac{7(y-2)}{2b} = \frac{z-3}{2}$$

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2b/7} = \frac{z-3}{2} \quad \text{— (1)}$$

$$D.R_1 = \left(-3, \frac{2b}{7}, 2\right)$$

$$\frac{+7x}{3b} = \frac{y-3}{1} = \frac{6-z}{5}$$

$$\frac{-7(x-1)}{3b} = \frac{y-5}{1} = \frac{-(z-6)}{5}$$

$$\frac{(x-1)}{\frac{-3b}{7}} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5} \quad \text{— (2)}$$

$$D.R_2 = \left(\frac{-3b}{7}, 1, -5\right)$$

$$D.R_1 \cdot DR_2 = 0$$

$$\left(-3, \frac{2b}{7}, 2\right) \cdot \left(\frac{-3b}{7}, 1, -5\right) = 0$$

$$(-3)\times\left(\frac{-3b}{7}\right) + \frac{2b}{7}\times 1 + 2\times -5 = 0$$

$$+\frac{9b}{7} + \frac{2b}{7} - 10 = 0$$

$$\frac{9b+2b}{7} = 10$$

$$\frac{11b}{7} = 10$$

$$11b = 70$$

$$b = \frac{70}{11}$$

इण्टरमीडिएट गणित, 2020 | 3 Set-I

4. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए—

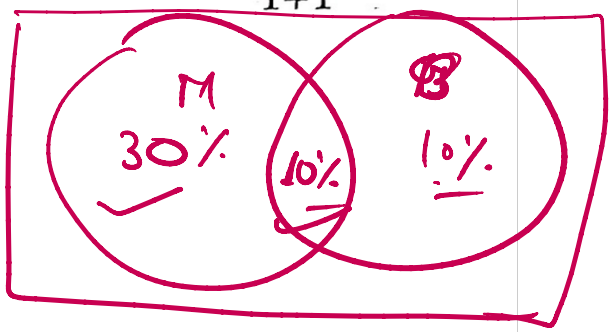
(क) एक कक्षा में 40% विद्यार्थी गणित, 20% विद्यार्थी जीव विज्ञान और 10% विद्यार्थी गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं। यादृच्छया एक विद्यार्थी चुना जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि—

(i) वह गणित पढ़ता है जबकि यह ज्ञात है कि वह जीव विज्ञान पढ़ता है

(ii) वह जीव विज्ञान पढ़ता है जबकि यह ज्ञात है कि वह गणित पढ़ता है। 1+1

(i) $P(M/B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ //



(ii) $P(B/M) = \frac{P(M \cap B)}{P(M)} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ //

$P(M) = \frac{1}{4\phi} = \frac{1}{4}$ //

(ख) $\int \frac{\sin(x-a)}{\sin(x+a)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ a अचर है। 2

$$I = \int \frac{\sin(x-a)}{\sin(x+a)}$$

$$= \int \frac{\sin(x+a-a-a)}{\sin(x+a)}$$

$$= \int -\frac{\sin(x+a-2a)}{\sin(x+a)} dx$$

$\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin a$

$A = x+a, \; B = 2a$

$$= \int \frac{\sin(x+a)\cdot\cos(2a) - \cos(x+a)\cdot\sin(2a)}{\sin(x+a)} dx$$

$$= \int \frac{\sin(x+a)\cdot\cos(2a)}{\sin(x+a)} dx - \int \frac{\cos(x+a)\cdot\sin(2a)}{\sin(x+a)} dx$$

$$= \int \cos(2a)\, dx - \int \cot(x+a)\cdot\sin 2a \, dx$$

$\int \cot x \, dx = \log_e \sin x + c$

$$= \cos(2a)\cdot x - \sin(2a)\log_e|x+a| + c$$

(ग) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके विकर्ण $\vec{d}_1 = 3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ और $\vec{d}_2 = \hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ हैं। 2

समान्तर चतुर्भुज का क्षे० $= |\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|$

समान्तर चतुर्भुज का क्षे० = $|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|$

$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(4-3) - \hat{j}(6+1) + \hat{k}(-9-2)$

$= \hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k}$

$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{1^2 + (-7)^2 + (-11)^2}$

$= \sqrt{1 + 49 + 121}$

$= \sqrt{171}$ Sq. units

(घ) फलन $f(x) = \cos 2x$ के लिए अन्तराल $[0, \pi]$ में रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 2

$[a, b]$

$a = 0, b = \pi$

(i) $f(a) = f(b)$

(ii) $f'(c) = 0$

(i) $f(0) = \cos 2 \times 0$

$= 1$

$f(\pi) = \cos 2 \times \pi$

$= 1$

$f(0) = f\pi$

Diff w.r.t 'x'

$f'(c) = 0$

$-\sin 2\pi \cdot 2 = 0$

$-\sin 2c = 0$

$2c = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$

$c = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots$

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** खण्डों को हल कीजिए—

(क) यदि $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\theta$, तो सिद्ध कीजिए कि

(ख) सिद्ध कीजिए कि—

$$\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3. \qquad 5$$

(ग) सिद्ध कीजिए कि–

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{1+\sqrt{\cot x}}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$ 5

(घ) सिद्ध कीजिए कि यदि वक्र $y=x^3$ और $xy=k$ एक दूसरे को लम्बवत् काटते हैं तो $3k=1$. 5

(ङ) रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

(च) अवकल समीकरण—

$x\frac{dy}{dx} = y - x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$ को हल कीजिए। 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** खण्डों को हल कीजिए—

(क) दिखाइए कि फलन—

$$f(x)=|x-2|=\begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x<2 \end{cases}$$

$x = 2$ पर सतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है। 5

(ख) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए—

$x + 3y \leq 60 \quad x + y \geq 10 \quad x \leq y \quad x \geq 0, y \geq 0$

$Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 5

(ग) वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के प्रथम चतुर्थांश में स्थित भाग और सरल रेखा $y = x$ तथा x-अक्ष से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(घ) एक थैले में 5 लाल, 4 काली और 3 सफेद गेंदें हैं। यदि एक के बाद एक 3 गेंद निकाली जाएँ तथा निकाली गई गेंदों को पुनः थैले में वापस नहीं रखा जाता है, तो तीनों गेंदों के लाल निकलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

(ङ) सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ पर लम्ब इकाई सदिश ज्ञात कीजिए, तथा उनके बीच के कोण की ज्या (sine) भी ज्ञात कीजिए। 5

(च) समीकरण— $\sec^{-1}\frac{x}{a}-\sec^{-1}\frac{x}{b}=\sec^{-1}b-\sec^{-1}a$ को हल कीजिए। 5

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) निम्नलिखित समीकरण निकाय—

$3x - 2y + 3z = 8,\ 2x + y - z = 1,\ 4x - 3y + 2z = 4.$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

(ख) (i) यदि शीर्ष $(2, -6)$, $(5, 4)$ और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान ज्ञात कीजिए। 3

(ii) यदि $\vec{a}=\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$ और $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$, तो एक सदिश $\vec{d}$ ज्ञात कीजिए जो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब है, और $\vec{c}.\vec{d}=15$ है। 5