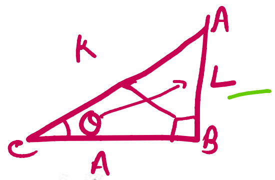
Most important formulas

05 December 2021 16:07

त्रिकोणमिति का परिचय

$\cos\theta = \frac{A}{K}$ $\sin\theta = \frac{L}{K}$ $\frac{LAL}{KKA}$

$\tan\theta = \frac{L}{A}$



1. **किसी समकोण Δ में कोण θ के लिए**

$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$, $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$, $\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$, $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$, $\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

2. **विभिन्न त्रिकोणमितीय अनुपातों में सम्बन्ध**

$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

3. **$(90° - \theta)$ कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात**

(i) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ (ii) $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$ (iii) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

(iv) $\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$ (v) $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$ (vi) $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$

4. **वर्गात्मक सम्बन्ध**

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta}$

$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$ $\text{cosec}\,\theta - \cot\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta + \cot\theta}$

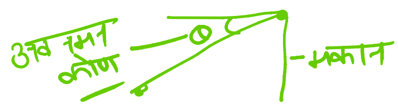
$\frac{(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta)}{(\sec\theta + \tan\theta)} = \frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{1 + \tan^2\theta - \tan^2\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

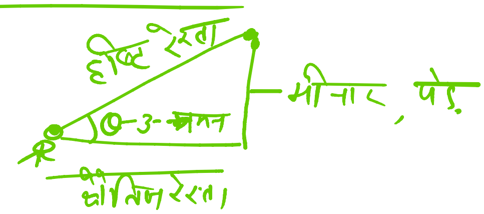
0°, 30°, 45°, 60° और 90° के कोणों के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणी

कोण	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं (∞)
cot	परिभाषित नहीं (∞)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	परिभाषित नहीं (∞)
cosec	परिभाषित नहीं (∞)	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

$\frac{0}{1}$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot = \frac{1}{\tan}$ $\frac{1}{0}$

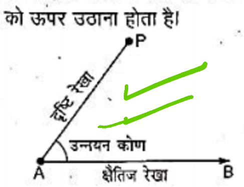
त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग



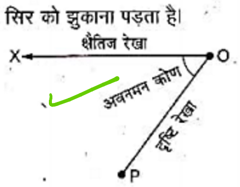


1. (i) दृष्टि रेखा–प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के बिन्दु को मिलाने वाली रेखा होती है।

(ii) देखी गई वस्तु का **उन्नयन कोण** दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जबकि यह क्षैतिज स्तर से ऊपर होता है अर्थात् वह स्थिति जबकि वस्तु को देखने के लिए हमें अपने सिर को ऊपर उठाना होता है।

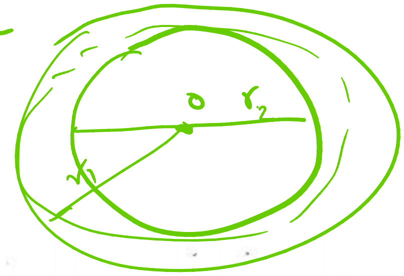


(iii) देखी गई वस्तु का **अवनमन कोण** दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जबकि दृष्टि रेखा क्षैतिज स्तर से नीचे होती है अर्थात् वह स्थिति जबकि वस्तु को देखने के लिए हमें अपने सिर को झुकाना पड़ता है।



2. त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से किसी वस्तु की ऊँचाई या लम्बाई या दो सुदूर वस्तुओं के बीच की दूरी ज्ञात की जा सकती है।

वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

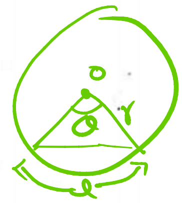


1. वृत्त का व्यास $= 2 \times$ त्रिज्या (r)
2. वृत्त की परिधि $= 2\pi r$ जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।
3. वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$
4. वृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल $= \pi (r_1^2 - r_2^2)$; जहाँ, r_1 व r_2 क्रमशः बाह्य व अन्तः वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।
5. (i) वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

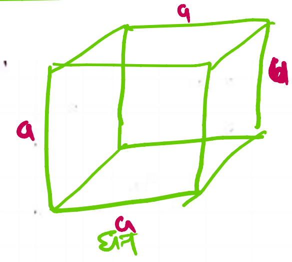
जहाँ θ त्रिज्यखण्ड का कोण व r वृत्त की त्रिज्या है।

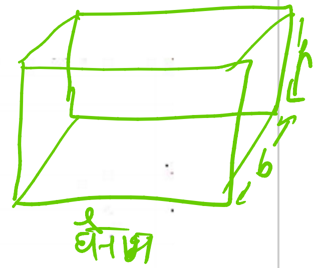
तथा $A = \frac{1}{2} lr$ जहाँ l त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई है।



(ii) वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $= r^2 \left[\frac{\pi\theta}{360^\circ} - \frac{\sin\theta}{2} \right]$ जहाँ θ सम्बन्धित त्रिज्यखण्ड का कोण है।

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन





घन और घनाभ से सम्बन्धित

घनाभ–यदि घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: l, b व h हैं, तब

(i) घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$ वर्ग मात्रक

(ii) घनाभ का आयतन $= lbh$ घन मात्रक

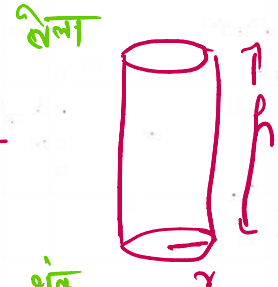
(iii) घनाभ का विकर्ण $= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ मात्रक

घन–यदि घन की प्रत्येक कोर की लम्बाई a हो तो

(i) घन का सम्पूर्ण पृष्ठों का क्षेत्रफल $= 6a^2$ वर्ग मात्रक

(ii) घन का आयतन $= a^3$ घन मात्रक

(iii) घन का विकर्ण $= \sqrt{3}\,a$ मात्रक



लम्बवृत्तीय बेलन

(i) आयतन $= \pi r^2 h;$ (ii) वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh$ (iii) सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(h + r)$

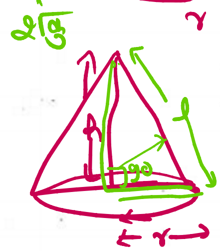
जहाँ r व h क्रमश: बेलन की त्रिज्या व ऊँचाई हैं।

लम्बवृत्तीय शंकु

(i) आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h;$ (ii) वक्रपृष्ठ $= \pi rl$

(iii) सम्पूर्ण पृष्ठ $= \pi r\,(l + r)$ (iv) तिरछी ऊँचाई $l = \sqrt{(r^2 + h^2)}$

जहाँ r, h व l शंकु की क्रमश: त्रिज्या, ऊँचाई व तिरछी ऊँचाई हैं।



गोला

(i) गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

(ii) गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 4\pi r^2$

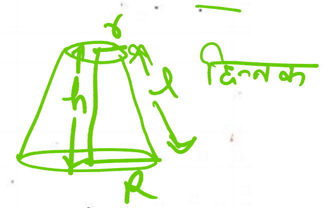
(iii) अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

(iv) अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 3\pi r^2$; जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

शंकु छिन्नक

माना शंकु छिन्नक के आधार व शीर्ष के वृत्तीय सिरे की त्रिज्यायें क्रमश: R व r हैं। माना इसकी ऊँचाई h व तिर्यक ऊँचाई l है, तब

(i) शंकु छिन्नक का आयतन $= \frac{\pi h}{3}[R^2 + r^2 + Rr]$ घन इकाई



(ii) शंकु छिन्नक का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल $= \pi l(R + r)$

जहाँ $l^2 = h^2 + (R - r)^2$ वर्ग इकाई

(iii) शंकु छिन्नक का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल

$= $ (आधार का क्षेत्रफल) + (शीर्ष का क्षेत्रफल) + (पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल)

$= [\pi R^2 + \pi r^2 + \pi l(R + r)] = \pi[R^2 + r^2 + l(R + r)]$ वर्ग इकाई

सांख्यिकी

$x_1, x_2 - - - x_n$

$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + - - - x_n}{n}$

1. समान्तर माध्य

(i) जब आँकड़े अवर्गीकृत हों–

चर x के मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ का समान्तर माध्य

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

लघु विधि–यदि कल्पित माध्य A, पदों की संख्या n, कल्पित माध्य से पदों का विचलन d हो तो समान्तर माध्य $= A + \frac{\Sigma d}{n}$

(ii) जब आँकड़े अवर्गीकृत परन्तु पदों की बारंबारता एक से अधिक हो–

यदि आँकड़ों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ की बारंबारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, \ldots, f_n$ हों तो इनका समान्तर माध्य

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

द्वितीय विधि–यदि कल्पित माध्य A, पदों की संख्या $\Sigma f = n$, विचलन d, संगत बारंबारता f हो तब समान्तर माध्य $= A + \frac{\Sigma fd}{n}$

(iii) जब आँकड़े वर्गीकृत हों–यदि वर्ग-अन्तराल का मध्यमान $= x$, संगत बारंबारता $= f$, बारंबारताओं का योग $= n$ हो तो

समान्तर माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

लघु विधि समान्तर माध्य $= A + \frac{\Sigma fd}{n}$

जहाँ $A =$ कल्पित माध्य, $\Sigma fd =$ सभी वर्ग-अन्तरालों के मध्यमानों का कल्पित माध्य से विचलन व संगत बारंबारताओं के गुणनफल का योगफल, $n = \Sigma f =$ सभी बारंबारताओं का योग

यदि x_i तथा संगत बारंबारता f_i बहुत अधिक हों तो समान्तर माध्य निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं–

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \Rightarrow \bar{x} = A + h\bar{u}$$

जहाँ $u = \frac{x_i - A}{h}$, $h =$ एक अचर राशि, $f =$ बारंबारता, $A =$ कल्पित माध्य

2. अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका यदि असंसाधित आँकड़ों के मानों को परिमाण के आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखा जाए, तो इस व्यवस्था के ठीक बीच के मान को आँकड़ों की माध्यिका कहा जाता है।

3. वर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका $= L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f}\left(\frac{n}{2} - C\right)$

$\underset{L_1}{10} - \underset{L_2}{20}$

जहाँ $L_1 =$ माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

$L_2 =$ माध्यिका वर्ग की उच्च सीमा

$f =$ माध्यिका वर्ग की बारंबारता

$n =$ बारंबारताओं का योग

$C =$ माध्यिका वर्ग से पहले वर्ग की संचयी बारंबारता

c

4. बहुलक–प्रेक्षणों में उस प्रेक्षण का मान जिसकी बारंबारता अधिकतम है उन प्रेक्षणों का बहुलक कहलाता है।

वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक $= l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times h$

जहाँ l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

h = वर्ग अन्तराल की माप

f = बहुलक वर्ग की बारंबारता

f_1 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारंबारता तथा

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता

5. समान्तर माध्य, माध्यिका और बहुलक में सम्बन्ध

समान्तर माध्य – बहुलक = 3 (समान्तर माध्य – माध्यिका)

या बहुलक = 3 माध्यिका – 2 समान्तर माध्य

Thank you