

गणित (केवल प्रश्न-पत्र)

समय - 3.00 घण्टा

कक्षा - 12

पूर्णांक - 100

नोट :- सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के निर्धारित अंक उसके समक्ष अंकित हैं।

1. सभी खण्डों के सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका पर लिखिए :- 6

(a) समाकलन $\int \log x \, dx$ का मान है :-

~~(i) $\frac{1}{x} + c$~~

~~(ii) $x \log x - x + c$~~

(iii) $x \log x + c$

(iv) $x \log x - \log x + c$

(b) x तथा y के मान क्या होंगे, यदि $\begin{bmatrix} x & y \\ 3y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ हो

(i) 2, 2

(ii) 3, 3

~~(iii) 1, 1~~

(iv) 4, 5

(c) अवकल समीकरण $\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$ की घात है :-

~~(i) 1~~

(ii) 2

(iii) 3

(iv) 4

(d) निम्न फलनों में असंतत फलन है :-

(i) $\sin x$

(ii) x^2

(iii) $\frac{1}{1-2x}$

~~(iv) $\frac{1}{1+x^2}$~~

(e) वक्र $y = 2x^2 + 3\sin x$ के $x = 0$ पर अभिलम्ब की प्रवणता है :-

(i) 3

(ii) $\frac{1}{3}$

(iii) -3

~~(iv) $\frac{1}{3}$~~

(f) $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1} (-2)$ का मान बराबर है :-

(i) π

(ii) $-\frac{\pi}{3}$

(iii) $\frac{\pi}{3}$

~~(iv) $\frac{2\pi}{3}$~~

(पृष्ठ पलटिए)

12/6

2. सभी खण्डों को हल कीजिए :-

(a) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हो तब $2A - B$ का मान ज्ञात कीजिए।

(b) $\int \frac{x}{e^x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

(c) फलन $f(x) = \sin 3x + y$ के उच्चतम मान (यदि कोई विद्यमान हो) ज्ञात कीजिए।

(d) सिद्ध कीजिए कि R पर $f(x) = e^{2x}$ से प्रदत्त फलन निरन्तर वर्धमान है।

(e) अवकल समीकरण $\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \left[\frac{dx}{dt}\right]^2 = e^x$ की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए।

3. सभी खण्डों को हल कीजिए :-

12

(a) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है तब $A^2 = 5A + 6I$ का मान ज्ञात कीजिए।

(b) दर्शाइए कि फलन $f(x) = x^2 + 5x + 3$ बिन्दु $x = 3$ पर सतत है।

(c) फलन $f(x)$ जो निम्न प्रकार परिभाषित है $f(x) =$

$$\begin{cases} \frac{\cos x}{2}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - x, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{2} \text{ पर } f(x) \text{ की सततता का परीक्षण कीजिए।}$$

(d) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. सभी खण्डों को हल कीजिए :-

12

(a) सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

(b) $\int (x^2 + 1) \log x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

(c) वक्र $y^2 = x^3$ के बिन्दु $(4, 8)$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(d) $\sin^2 y + \cos xy = k$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

5. निम्न में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :-

25

(a) $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ को हल कीजिए।

(b) यदि $\vec{A} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = 0$ हो तो $(\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए।

(c) यदि $y = e^{\cos^{-1}x}$, $-1 \leq x \leq 1$ तो दर्शाइए कि $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - a^2y = 0$

(d) सिद्ध कीजिए कि n के सभी मानों के लिए सरल रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ वक्र

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = 2$$
 को बिन्दु (a, b) पर स्पर्श करती है।

(e) फलन $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$ के उच्चतम तथा न्यूनतम मानों के लिए x के मान ज्ञात कीजिए।

(f) $\int \frac{\sin x + \cos x}{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :-

25

(a) $\sqrt{3-2x-2x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(b) रेखा $y = 3x + 2$, x अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(c) अवकल समीकरण $(xy^2 + x) dx + (yx^2 + y) dy = 0$ को हल कीजिए।

(d) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $A(1; 1, 2)$ $B(2, 3, 5)$ और $C(1, 5, 5)$ हैं।

(e) यदि $y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \tan^{-1}x$ है तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(f) सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ जो $f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{N}$ से परिभाषित है एकैकी और अन्तःक्षेपी है।

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :-

10

(a) निम्नलिखित समीकरण निकाय $3x - 2y + 2z = 8$, $2x + y - z = 1$ तथा $4x - 3y + 2z = 4$ आव्यूह विधि से हल कीजिए।

अथवा

(b) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{1 + \sqrt{\cot x}} dx = \frac{\pi}{4}$