

UP BOARD EXAM

अर्द्धवार्षिक परीक्षा-2022-23

समय: 3 घण्टा

कक्षा 12B

पूर्णांक 100

विषय - गणित

निर्देश- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं-

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए प्रत्येक 1 अंक का है-

(क) यदि $R = \{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 1)(2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध है-

(i) सममित

(ii) स्ववुल्य

(iii) संक्रामक

(iv)

कोई

नहीं

(ख) $\sin \left\{ \frac{\pi}{3} - \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \right\}$ का मान है-

(i) $\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{1}{3}$

(iii) $\frac{1}{4}$

(iv)

1

(ग) $x^2 + xy + y^2 = 100$ का अवकलन है-

(i) $\frac{2x-y}{x-2y}$

(ii) $\frac{2x-y}{x+2y}$

(iii) $\frac{2x+y}{x-2y}$

(iv) $\frac{2x+y}{x+2y}$

(घ) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ तो $A+A = A$ तो θ का मान होगा-

(i) $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\frac{\pi}{3}$

(iii) π

(iv) $\frac{3\pi}{2}$

(ङ) एक वृत्त की त्रिज्या $r = 8\text{cm}$ पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है-

(i) 10π

(ii) 12π

(iii) 14π

(iv) 16π

प्रश्न 2. सभी खण्ड कीजिए प्रत्येक 1 अंक का है—

(क) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \rightarrow R$ में एकैकी तथा आच्छादक है—

(ख) $\cos^{-1} \frac{1}{2} + 2 \sin^{-1} \frac{1}{2}$ का मान है—

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ है तो AB का मान ज्ञात कीजिए।

(घ) यदि $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 3. सभी खण्ड कीजिए प्रत्येक 2 अंक का है—

(क) यदि $x^n + y^n = a^n$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ख) वक्र $6y = 9 - 3x^2$ के बिन्दु $(1,1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ग) सारणिकों का प्रयोग करके $(1,2)$ और $(3,6)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(घ) $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ तो $f(A)$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $f(x) = x^2 - 2x + 3$

प्रश्न 4. सभी खण्ड कीजिए प्रत्येक 2 अंक का है—

(क) यदि A और B समान क्रम के दो सममित आव्यूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि $(AB-BA)$ एक विषम सममित आव्यूह है।

(ख) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए कि $|2A| = 4|A|$

(ग) $\sin^{-1} (2x\sqrt{1-x^2})$ का $\cos^{-1} x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

(घ) एक पाइप से रेत $12 \text{ cm}^3/\text{s}$ की दर से गिर रही है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है। जबकि ऊँचाई 4 cm है।

प्रश्न 5. सभी खण्ड कीजिए प्रत्येक 5 अंक का है-

(क) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $N \times N$ पर सम्बन्ध R जहाँ $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$ एक तुल्यता सम्बन्ध है

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए कि $(AB)' = B' \cdot A'$

(ग) दर्शाइए कि $\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix} = abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

(घ) दिखाइए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषा फलन एक सतत फलन है।

(ङ) उन अन्तरालों को ज्ञात कीजिए, जिसमें फलन $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ निरन्तर वर्धमान या हासमान है।

प्रश्न 6. सभी खण्ड कीजिए प्रत्येक 5 अंक का है-

(क) सिद्ध कीजिए कि यदि वक्र $ax^2+by^2 = 1$ और $a'x^2+b'y^2 = 1$ लम्बकोणीय है तो $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$

(ख) अवकलज का प्रयोग करके $(255)^{\frac{1}{4}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ग) यदि समकोणीय अतिपरवलय $xy = c^2$ के बिन्दु t पर खींचा गया अभिलम्ब अतिपरवलय से फिर बिन्दु t पर मिलता है तो सिद्ध कीजिए कि $t^3 t' = -1$

(घ) $[0, 2\pi]$ पर फलन $x + \sin 2x$ का उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

(ङ) यदि $y = a^{x^{a^{x^{\dots \infty}}}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \log y}{x(1-y \log x \cdot \log y)}$

प्रश्न 7. निम्नलिखित में किसी एक खण्ड को हल कीजिए जो 8 अंक का है।

(क) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ को प्रारम्भिक रूपान्तरण के प्रयोग से व्युक्रम ज्ञात कीजिए।

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ तथा 1 कोटि 2 का एक तत्समक आवर्धक है तो

सिद्ध कीजिए कि- $I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

प्रश्न 8. निम्नलिखित में किसी एक खण्ड को हल कीजिए जो 8 अंक का है।

(क) यदि $a+b+c = 2s$ तो सिद्ध कीजिए कि-

$$\begin{bmatrix} a^2 & (s-a)^2 & (s-a)^2 \\ (s-a)^2 & b^2 & (s-b)^2 \\ (s-c)^2 & (s-c)^2 & c^2 \end{bmatrix} = 2s^2 (s-a)(s-b)(s-c)$$

(ख) निम्नलिखित समीकरण को आव्यूह विधि द्वारा हल कीजिए।

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

प्रश्न 9. निम्नलिखित में किसी एक खण्ड को हल कीजिए जो 8 अंक का है।

(क) सिद्ध कीजिए कि उस समहिवाहु त्रिभुज का न्यूनतम परिमाण जिसके अन्तर्गत r त्रिज्या का वृत्त बना है। $6r\sqrt{3}$

(ख) यदि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का अमिलम्ब x -अक्ष से θ कोण बनाये तब सिद्ध कीजिए कि इसका समीकरण $y \cos \theta - x \sin \theta = a \cos 2\theta$
